Prédiction Conforme I

Université Lyon 2

2024/2025

Rémi Vaucher
PhD Advisor: Stéphane Chrétien
HALIAS & ERIC Lab.

Table des matières

Table of Contents

Les deux types de quantification d'incertitudes

- La quantification d'incertitude **de mesure**.
- La quantification d'incertitude **de prédiction.**

Intervalle de confiance

Question : Qu'est ce qu'un intervalle de confiance?

Intervalle de confiance

Question : Qu'est ce qu'un intervalle de confiance?

Un intervalle de confiance sert à encadrer une valeur rélle, généralement la moyenne. L'objectif est donc de trouver $[a; b]$ tel que $\mathbb{P}[a \leq v \leq b] \simeq 0,95$.

Intervalle de confiance

Question : Qu'est ce qu'un intervalle de confiance?

Un intervalle de confiance sert à encadrer une valeur rélle, généralement la moyenne. L'objectif est donc de trouver $[a; b]$ tel que $\mathbb{P}[a \leq v \leq b] \simeq 0,95$.

Comment construit on l'intervalle de confiance pour la moyenne?

Intervalle de confiance

Question : Qu'est ce qu'un intervalle de confiance?

Un intervalle de confiance sert à encadrer une valeur rélle, généralement la moyenne. L'objectif est donc de trouver $[a; b]$ tel que $\mathbb{P}[a \leq v \leq b] \simeq 0,95$.

Comment construit on l'intervalle de confiance pour la moyenne?

Cet intervalle est construit sur la base du théorème central limite: Une somme de variable aléatoire S_n converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

Intervalle de confiance

On obtient facilement (du moment que l'on connait assez bien les quantiles de la $\mathcal{N}(0,1)$) un intervalle dans lequel $\frac{S_n}{n}$ est contenu a hauteur de 95%.

Intervalle de confiance

On obtient facilement (du moment que l'on connait assez bien les quantiles de la $\mathcal{N}(0,1)$) un intervalle dans lequel $\frac{S_n}{n}$ est contenu a hauteur de 95%.

Question : Comment exploiter cette notion dans une régression linéaire?

Intervalle de confiance

On obtient facilement (du moment que l'on connait assez bien les quantiles de la $\mathcal{N}(0, 1)$) un intervalle dans lequel $\frac{S_n}{n}$ est contenu a hauteur de 95%.

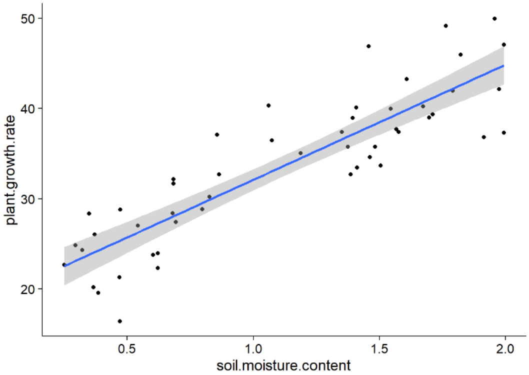
Question : Comment exploiter cette notion dans une régression linéaire?

Comme l'intervalle de confiance ne permets que d'encadrer une "moyenne", nous ne pouvons qu'encadrer la moyenne des données $\overline{x}$. Sauf que cette quantité intervient dans le calcul des coefficients β_0 et β_1 de la droite de régression D. On obtient donc un encadrement de β_0 et β_1.

Intervalle de confiance

Finalement, on obtient un ensemble de droite de régressions $\mathcal{R}$ tel que

$$\mathbb{P}[D \in \mathcal{R}] \simeq 0,95$$



Intervalle de prédiction

L'intervalle de confiance permets (dans ce cas ci) de créer un ensemble de modèles possibles.
Mais généralement, on utilise la droite de régression "principale" pour la suite.

Intervalle de prédiction

L'intervalle de confiance permets (dans ce cas ci) de créer un ensemble de modèles possibles. Mais généralement, on utilise la droite de régression "principale" pour la suite.

Il est évident que la réalité ne marche pas selon un modèle linéaire, nous devons donc maintenant quantifier l'erreur de prédiction.

Intervalle de prédiction

L'intervalle de confiance permets (dans ce cas ci) de créer un ensemble de modèles possibles. Mais généralement, on utilise la droite de régression "principale" pour la suite.

Il est évident que la réalité ne marche pas selon un modèle linéaire, nous devons donc maintenant quantifier l'erreur de prédiction.

Pour cela rappelons nous donc les conditions/hypothèses du modèle linéaire:

Intervalle de prédiction

Intervalle de prédiction

- Concernant les résidus:
  - Indépendance
  - Normalité
  - Même variance

Intervalle de prédiction

- Concernant les résidus:
  - Indépendance
  - Normalité
  - Même variance
- Il existe une relation linéaire entre les prédicteurs et la réponse moyenne.

Intervalle de prédiction

- Concernant les résidus:
  - Indépendance
  - Normalité
  - Même variance
- Il existe une relation linéaire entre les prédicteurs et la réponse moyenne.
- L'erreur de mesure des prédicteurs est négligeable.

Intervalle de prédiction

Question : En pratique, combien de ces conditions sont vraies?

Intervalle de prédiction

Question : En pratique, combien de ces conditions sont vraies?

En admettant que ce soit vrai, comment calculer l'erreur de prédiction ?

Intervalle de prédiction

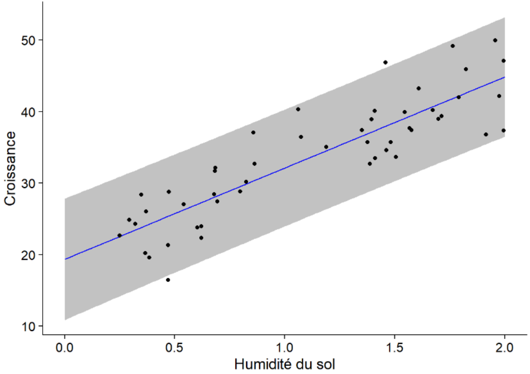
Question : En pratique, combien de ces conditions sont vraies?

En admettant que ce soit vrai, comment calculer l'erreur de prédiction ?

On considère (en faisant une petite simplification) que $Y_{rec} = Y_{pred} + 1,96\sigma_{err}$.

Intervalle de prédiction

Comme σ_{err} est partout le même, on obtient deux nouvelles droites encadrant les valeurs:



Conclusion de l'introduction

- Est ce vraiment ce que l'on veut?

Conclusion de l'introduction

- Est ce vraiment ce que l'on veut?
- Peut on vraiment souvent rentrer dans ces conditions si... drastiques?

Conclusion de l'introduction

- Est ce vraiment ce que l'on veut?
- Peut on vraiment souvent rentrer dans ces conditions si... drastiques?

Dans les deux cas, la réponse est non (si vous n'êtes pas convaincu, je ne peux plus rien pour vous).

Conclusion de l'introduction

- Est ce vraiment ce que l'on veut?
- Peut on vraiment souvent rentrer dans ces conditions si... drastiques?

Dans les deux cas, la réponse est non (si vous n'êtes pas convaincu, je ne peux plus rien pour vous).

Toutefois, il faut savoir qu'il existe des méthodes permettant de quantifier l'erreur plus précisément et de manière plus adaptable.

Table of Contents

Rappel

Définition

On considère une variable aléatoire Y de fonction de répartition F_Y, et un seuil $\tau \in]0;1[$.
Le **quantile d'ordre** τ **pour** Y est:

Définition

On considère une variable aléatoire Y de fonction de répartition F_Y, et un seuil $\tau \in]0;1[$.
Le **quantile d'ordre τ pour Y** est:

$$q_\tau(Y) = \inf\{y : F_Y(y) \leq \tau\} = F_Y^{-1}(\tau)$$

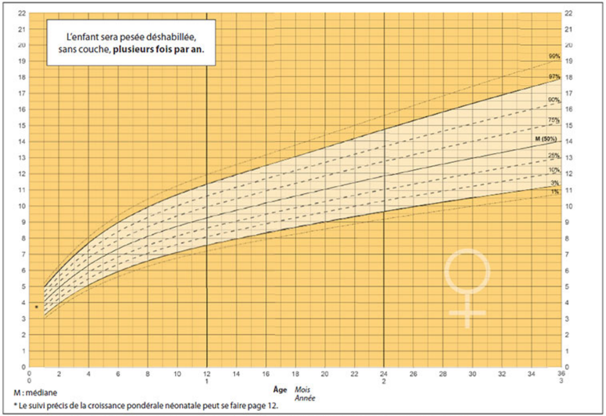
Le but d'une régression quantile

L'objectif d'une régression quantile est de déterminer comment les quantiles conditionnels

$$q_\tau(Y|X)$$

se comportent selon X. Ainsi, la régression quantile "peut" sortir une régression correspondante à chaque niveau voulu.

Exemple présent dans le carnet de santé



Courbes de croissance AFPA – CRESS/INSERM - CompuGroup Medical, 2018 [enfants nés à plus de 2 500 g et suivis par des médecins sur le territoire métropolitain].

Ca paraît trop beau pour être vrai

Sur cet exemple, les courbes sont plutôt belles, dans un premier temps nous n'arriverons pas à cela...

Ca paraît trop beau pour être vrai

Sur cet exemple, les courbes sont plutôt belles, dans un premier temps nous n'arriverons pas à cela...

Nous allons voir deux méthodes qui permettent de mettre en oeuvre la régression quantile.

Le contexte

Le **modèle quantile** a été créé par Roger Koenker et George Bassett en 1978

Le contexte

Le **modèle quantile** a été créé par Roger Koenker et George Bassett en 1978

L'objectif est de déterminer les quantiles d'une variable aléatoire Y conditionellement à X

La régression quantile standard

On considère ici que la fonction quantile conditionnelle est linéaire en X:

$$q_\tau(Y|X) = X^T \beta_\tau$$

La régression quantile standard

On considère ici que la fonction quantile conditionnelle est linéaire en X:

$$q_\tau(Y|X) = X^T \beta_\tau$$

Ce qui équivaut écrit autrement à

$$Y = X^T \beta_\tau + \varepsilon_\tau, \quad \text{avec} \quad q_\tau(\varepsilon_\tau|X) = 0$$

Remarques :

- Dans ce modèle, on obtient des coefficients "propres" à chaque quantile.

Remarques :

- Dans ce modèle, on obtient des coefficients "propres" à chaque quantile.
- Forcément, selon la définition d'ε_τ le modèle se comportera différemment.

Détermination des coefficients β

Dans le modèle de régression quantile standard (donc linéaire) on démarre de l'estimateur du quantile d'ordre τ:

$$\hat{q}_\tau(Y|X) = \arg\min_b \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(Y_i - b)$$

avec $\rho_\tau(u) = (\tau - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u))u$

Détermination des coefficients β

Dans le modèle de régression quantile standard (donc linéaire) on démarre de l'estimateur du quantile d'ordre τ:

$$\hat{q}_\tau(Y|X) = \arg\min_b \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(Y_i - b)$$

avec $\rho_\tau(u) = (\tau - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u))u$
On pourra remarquer que pour $\tau = 0,5$, nous retrouvons bien l'estimateur de la médiane.

De l'estimateur à une fonction loss

En considérant que l'on dispose d'une approximation de la forme $q_\tau(Y|X)$, on obtient:

$$\beta_\tau = \arg\min \mathbb{E}[\rho_\tau(Y - X^T\beta)]$$

De l'estimateur à une fonction loss

En considérant que l'on dispose d'une approximation de la forme $q_\tau(Y|X)$, on obtient:

$$\beta_\tau = \arg\min \mathbb{E}[\rho_\tau(Y - X^T\beta)]$$

Attention tout de fois: la fonction ρ_τ n'est pas convexe, et elle n'est pas différentiable en 0!

- **Sur R :** On utilisera la librairie *quantreg* et la fonction *rq* associée.
- **Sur python :** On utilisera la fonction *QuantileRegressor* de *SciKitLearn*