

TDA II

Université Lyon 2

2024/2025

Rémi Vaucher

HALIAS & ERIC Lab.



- 1 **Groupes d'homologies**
 - Les groupes d'homologies en (très) bref

- 1 **Groupes d'homologies**
 - Les groupes d'homologies en (très) bref

On considère un complexe simplicial \mathcal{C} .

Définition

- Une **chaîne** de dimension k est un complexe simplicial dont tous les simplexes sont soit de dimension k , soit face d'un simplexe de dimension k .
- Un **cycle** de dimension k est une chaîne de dimension k **fermée**.
- Une **frontière** est un cycle de dimension k dont les simplexes de dimension k sont **exactement** les faces d'un simplexes de dimension $k + 1$.

Exemples

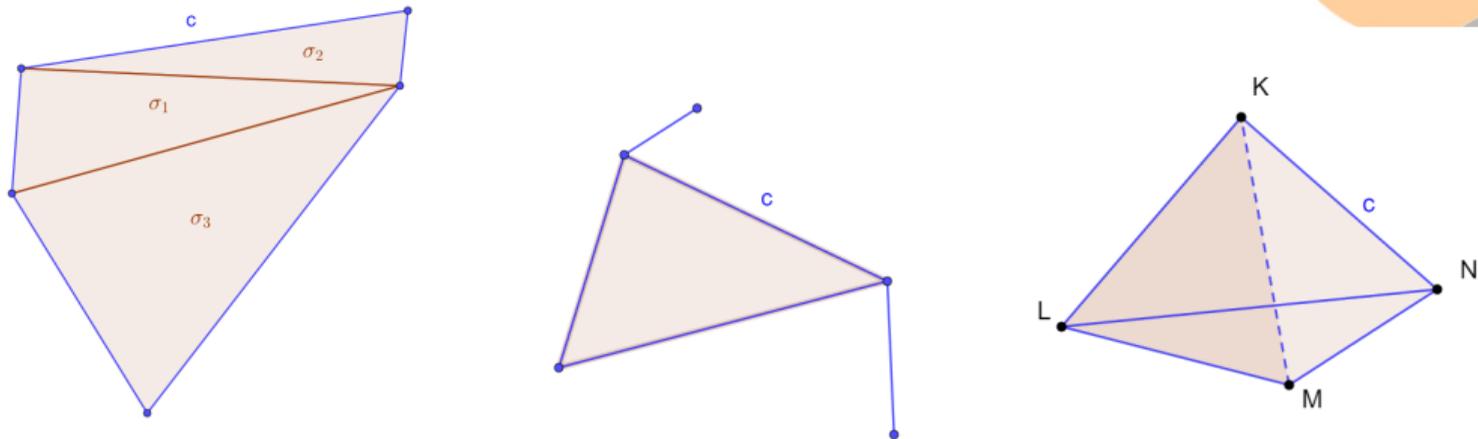


Figure 1: A gauche: $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ est une 2-chaîne, et c est une frontière.
Au centre: c est une chaîne, mais pas un cycle. **A droite:** c est une frontière.

☀ Définition



Le i -ème groupe d'homologie d'un complexe simplicial \mathcal{C} , noté $H_i(\mathcal{C})$, est l'ensemble des **cycles** de dimension i dans \mathcal{C} à *une ou plusieurs frontières près*.

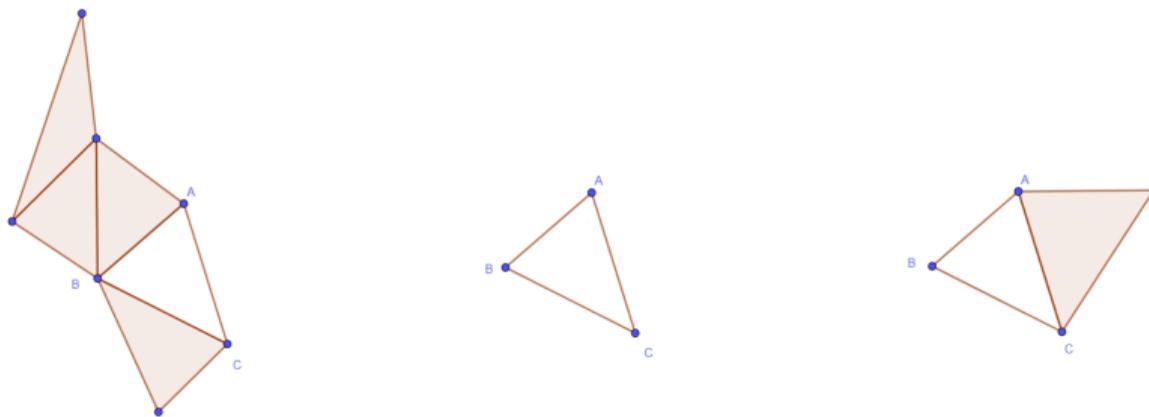


Figure 2: Les 3 objets ici sont les mêmes au sens du premier groupe d'homologie.

Définition



Le i -ème nombre de Betti est la dimension de $H_i(\mathcal{C})$ (au sens: le nombre d'objets distincts dans $H_i(\mathcal{C})$)



Remarque(s)

De manière plus simple, les nombres de Betti sont les nombres de cavités i dimensionnelles.

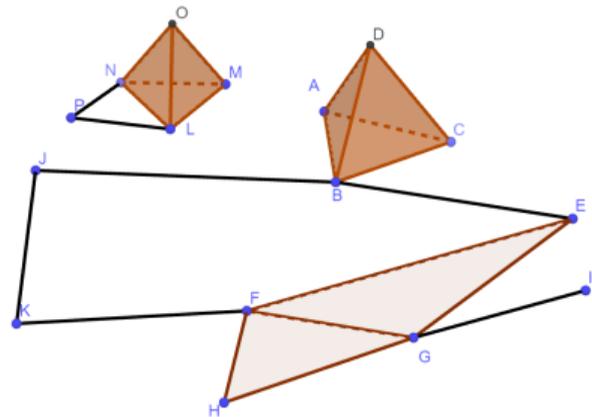
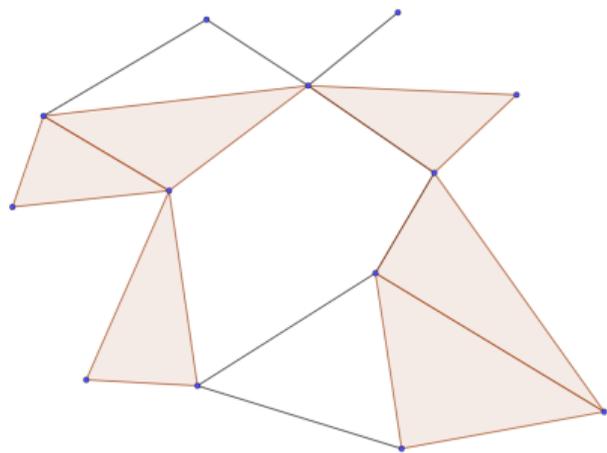


Figure 3: Quels sont les nombres de Betti pour ces deux figures?

Pour un complexe de Čech ou Rips, on peut évaluer les nombres de Betti en fonction du rayon α . On peut donc créer

$$B : \alpha \mapsto B(\alpha) = (b_0(\alpha), b_1(\alpha), \dots, b_n(\alpha), \dots)$$

- Cette fonction est caractéristique du complexe à homotopie près (on passera la notion d'homotopie sous silence: c'est une notion encore plus forte que celle d'homéomorphisme).
- Déterminer cette fonction permet de **vectoriser** une partie du contenu de l'évolution temporelle du complexe. On peut l'utiliser comme entrée dans un algorithme de machine learning.